**PENGALI LAGRANGE**

**Contoh:**

Tentukan nilai ekstrim (minimum dan maksmum) dari dengan kendala .

**Penyelesaian:**

Kendala pada soal di atas adalah .

Menyelesaikan persamaan ,

Diperoleh

*🡪*

*🡪*

Dari (1) diperoleh 2𝑥(1 − 𝜆) = 0 sehingga 𝑥 = 0 atau 𝜆 = 1.

(i) Jika 𝑥 = 0, maka dari (3) diperoleh 𝑦 = ±1

(ii) Jika 𝜆 = 1, maka dari (2) diperoleh 4𝑦 = 2𝑦 atau 𝑦 = 0, sehingga dari (3) diperoleh 𝑥 = ±1.

Jadi 𝑓 mempunyai 4 kemungkinan titik ekstrim di titik (0,1) , (0, −1) , (1,0) , (−1,0)

Nilai fungsi untuk setiap titik yaitu 𝑓(0,1) = 2 , 𝑓(0, −1)= 2, 𝑓(1,0) = 1 , 𝑓 (−1,0) = 1

Jadi, nilai maksimum dari 𝑓 dengan kendala 𝑥 2 + 𝑦 2 = 1 adalah 2 dan nilai minimum 1.

**Latihan 1 (2 kendala):**

Tentukan nilai maksimum dan minimum dari pada kurva perpotongan tabung dengan bidang.

Penyelesaian:

Diketahui fungsi kendala masing-masing adalah = dan

Dengan metode Langrange

diperoleh 5 persamaan berikut

…(1)

…(2)

…(3)

…(4)

…(5)

Subtitusi persamaan (3) ke (2) diperoleh …(6)

Subtitusi persamaan (6) ke (1) diperoleh …(7)

Substitusi persamaan (7) ke (4) diperoleh dan

Subtitusi ke persamaan (5) menghasilkan atau

Hal ini memberikan dua titik kritis berikut

Subtitusi titik-titik kritis ke fungsi objektif untuk mengatahui nilai ekstrim

(Maksimum)

(Minimum)

**Latihan 2:**

Tentukan volume maksimum dari sebuah kotak tanpa tutup yang memiliki luas permukaan 12 cm2 .

Penyelesaian:

Misal 𝑥, 𝑦, 𝑧 berturut-turut merupakan panjang, lebar, dan tinggi kotak. Akan dicari volume maksimum, yaitu Maks 𝑉 = 𝑥𝑦𝑧 Dengan kendala 𝑔 (𝑥, 𝑦, 𝑧) = 2𝑥𝑧 + 2𝑦𝑧 + 𝑥𝑦 = 12.

Menyelesaikan persamaan

∇𝑉 = 𝜆∇𝑔

𝑔 (𝑥, 𝑦, 𝑧) = 2𝑥𝑧 + 2𝑦𝑧 + 𝑥𝑦 = 12,

Diperoleh persamaan

𝑉𝑥 = 𝜆𝑔𝑥 → 𝑦𝑧 = 𝜆(2𝑧 + 𝑦) …(1)

𝑉𝑦 = 𝜆𝑔𝑦 → 𝑥𝑧 = 𝜆(2𝑧 + 𝑥) …(2)

𝑉𝑧 = 𝜆𝑔𝑧 → 𝑥𝑦 = 𝜆(2𝑥 + 2𝑦) …(3)

2𝑥𝑧 + 2𝑦𝑧 + 𝑥𝑦 = 12 …(4)

Dengan mengalikan (1) dengan 𝑥, (2) dengan 𝑦, dan (3) dengan 𝑧 diperoleh

𝑥𝑦𝑧 = 𝜆(2𝑥𝑧 + 𝑥𝑦) …(5)

𝑥𝑦𝑧 = 𝜆(2𝑦𝑧 + 𝑥𝑦) …(6)

𝑥𝑦𝑧 = 𝜆(2𝑥𝑧 + 2𝑦𝑧) …(7)

Persamaan (5) dan (6) mempunyai nilai sama, sehingga

𝜆 (2𝑥𝑧 + 𝑥𝑦) = 𝜆 (2𝑦𝑧 + 𝑥𝑦) ⟺ 𝜆 (2𝑥𝑧 + 𝑥𝑦) − 𝜆 (2𝑦𝑧 + 𝑥𝑦) = 0 ⟺ 𝜆(2𝑥𝑧 + 𝑥𝑦 − 2𝑦𝑧 – 𝑥𝑦) = 0 ⟺ 2𝜆 (𝑥𝑧 – 𝑦𝑧) = 0 ⟺ 𝜆 = 0 atau 𝑥𝑧 − 𝑦𝑧 = 0

𝜆 = 0 tidak memenuhi, karena berarti persamaan (1) menghasilkan 𝑦𝑧 = 0 → 𝑦 = 0 atau 𝑧 = 0, sedangkan panjang, lebar, dan tinggi tidak boleh 0.

Jadi yang mungkin adalah 𝑥𝑧 − 𝑦𝑧 = 0 atau 𝑥 = 𝑦… (8)

Persamaan (6) dan (7) mempunyai nilai sama, sehingga

𝜆(2𝑦𝑧 + 𝑥𝑦) = 𝜆(2𝑥𝑧 + 2𝑦𝑧) ⟺ 𝜆(2𝑦𝑧 + 𝑥𝑦) – 𝜆(2𝑥𝑧 + 2𝑦𝑧)= 0 ⟺ 𝜆(2𝑦𝑧+𝑥𝑦−2𝑥𝑧−2𝑦𝑧)= 0 ⟺ 𝜆 (𝑥𝑦 − 2𝑥𝑧) = 0⟺ 𝜆 = 0 atau 𝑥𝑦 − 2𝑥𝑧 = 0

Diperoleh 𝑥𝑦 = 2𝑥𝑧 atau 𝑦 = 2𝑧 … (9) .

Dari (8) dan (9) diperoleh 𝑥 = 𝑦 = 2𝑧

Dari (4) diperoleh 2𝑥𝑧 + 2𝑦𝑧 + 𝑥𝑦 = 12 ⟺ 4𝑧2 + 4𝑧2 + 4𝑧2 = 12 ⟺ 12𝑧2 = 12 ⟺ 𝑧 = 1

Jadi, 𝑥 = 2, 𝑦 = 2, 𝑧 = 1.

Volume maksimum 𝑉(2,2,1) = 4 cm3 .